Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
M.Sc. Thor Wittich

Wintersemester 2021/22
13.12.2021

Lineare Algebra I
Blatt 9

---

1 | Kastenwesen

Welche Matrizen stellen die folgenden linearen Abbildungen f, g, h und ihre Kompositionen $g \circ f$, $h \circ g$ und $h \circ g \circ f$ dar?

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ 3x+2y-z \\ z+7x \end{pmatrix}$$

$$g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z-3w \\ y-3w \end{pmatrix}$$

$$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \\ x-y \end{pmatrix}$$

2 | Großes ABC

Welche der durch die folgenden Matrizen definierten linearen Abbildungen $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ sind injektiv? Welche surjektiv?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

3 | Erbsenzählen

(a) Ein $\mathbb{F}_p$-Vektorraum der Dimension n hat p^n Elemente.

(b) Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind kein endlich-dimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum.
Tipp: Ein Produkt endlich vieler abzählbarer Mengen ist wieder abzählbar.

4 | Grenzen des Wachstums

Eine *Fahne der Länge d* in einem Vektorraum V ist eine Kette von Untervektorräumen von V der Form $U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \cdots \subsetneq U_d$. (Die Notation $A \subsetneq B$ bedeutet ($A \subseteq B$ aber $A \neq B$). Ist V endlich-dimensional, so ist die maximale Länge einer solchen Fahne gleich der Dimension von V.

Abgabefrist: 22.12.2021, 10:15 Uhr (nur online). Bitte achten Sie darauf, dass Ihre Datei nicht größer als 15 MB ist.